Φροντιστηριακό Κέντρο Ιωαννίνων
ΣΚΑΛΙΣΤΗ - ΔΕΡΕΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1°

α. για α,β>0 και θετικό ακέραιο ν

1) για την απόδειξη του ΟΡΘΟΥ

έστω α$>\beta$ $\Longrightarrow \begin{cases} \alpha>\beta \\ \alpha>\beta \ \dots \ \text{ν φορές} \\ \alpha>\beta \end{cases}$

πολ/ζω κατά μέλη $\Longrightarrow \alpha^\nu>\beta^\nu$

(Ισχύει ο πολ/μός κατά μέλη για θετικούς αριθμούς και για ανισότητες της ίδιας φοράς)

2) για την απόδειξη του ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ

(με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο)

έστω $\alpha^\nu>\beta^\nu$ και υποθέτουμε ότι α$\leq \beta$

τότε αν α=β $\Rightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu$ που είναι άτοπο επίσης

αν α$<\beta \Rightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu$ που επίσηςείναι άτοπο

άρα α$>\beta$

β. Σύμφωνα με την ιδιότητα

α=β $\Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu$για α,β$\geq 0$

στην σχέση $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$ υψώνουμε στην μ·ν

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu}=\left(\sqrt[\mu\nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow$ α=α που ισχύει.

γ. Αν x_1καιx_2 οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης α$x^2+\beta x+$γ=0 με α$\neq$0

έχουμε x_1+x_2=$\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$

και $x_1x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=$

$=\frac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$

ΖΗΤΗΜΑ 2°

Αφού έχουμε $3 < x < 9$ θα έχουμε

$x > 3 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x - 2$ επίσης

$x < 9 \Rightarrow x < 10 \Rightarrow x - 10 < 0 \Rightarrow |x-10| = -x + 10$ επίσης

$x > 3 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x + 1$

Άρα Α= $3|x-2| - 2|x-10| + 5|x+1| =$

$=3(x-2) - 2(-x+10) + 5(x+1) =$

$=3x - 6 + 2x - 20 + 5x + 5 = 10x - 21$

Αρα $3 < x < 9 \Leftrightarrow 30 < 10x < 90 \Leftrightarrow$

$30-21 < 10x - 21 < 90 - 21 \Leftrightarrow 9 < 10x - 21 < 69$

$\Leftrightarrow 9 < A < 69$

ΖΗΤΗΜΑ 3°

$g(x) = x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow g(x) = (x-5)(x-1)$

Γιατί η Δ=16 και οι ρίζες $x_1 = 5$ και $x_2 = 1$

α. $g(x+1) = x - 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 6(x+1) + 5 = x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 6x - 6 + 5 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x = x - 4 \Leftrightarrow$

$x(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4 = 0$ ή $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 1$

β. $\frac{g(x)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x-1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$ για $x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0$ άρα

και $x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ και $x < 5 \Rightarrow x - 5 < 0$

οπότε για $x < -1$ θα έχουμε την παράσταση $\frac{(x-5)(x-1)}{x+1}$ αρνητική

και όμοια κάνουμε για τα άλλα διαστήματα

και θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα με $x \neq -1$

		o		●		●		
-∞	-	-1	+	1	-	5	+	+∞

Οπότε $-1 < x \leq 1$ ή $x \geq 5$

ΖΗΤΗΜΑ 4°

α.

Οι όροι γίνονται $2\mu-2$, $3\mu+6$, $12\mu+6$

Επειδή είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

θα ισχύει $2(3\mu+6)=2\mu-2+12\mu+6 \Leftrightarrow 6\mu+12=14\mu+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8\mu=-8 \Leftrightarrow \mu=1$

β. **για $\mu=1$ οι όροι είναι 0 , 9 , 18 και**

$\omega=18-9=9-0 \Rightarrow \omega=9$

επειδή ο $3(\mu+2)=3\mu+6=9$ είναι ο $4^{ος}$ όρος

θα έχουμε από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

$\alpha_4=\alpha_1+(4-1)\cdot 9 \Rightarrow 9=\alpha_1+27 \Rightarrow \alpha_1=-18$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΕΡΕΚΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ