ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΚΑΛΙΣΤΗ - ΔΕΡΕΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1°

α. επειδή και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικοί αριθμοί έχουμε

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow (|\alpha+\beta|)^2 \le (|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \le |\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \le |\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \le \alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta \le 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \le |\alpha\beta| \text{ που ισχύει}$$

β. Θέλουμε να βρούμε τον γεωμετρικό μέσο μ δύο όρων κ ,ν γεωμετρικής προόδου.

Θα έχουμε κ , μ , ν είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν λ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου

θα ισχύει $\frac{\mu}{\kappa} = \lambda$ και $\frac{\nu}{\mu} = \lambda$ άρα $\frac{\mu}{\kappa} = \frac{\nu}{\mu} \Leftrightarrow \mu^2 = \kappa\nu \Leftrightarrow \mu = \sqrt{\kappa\nu}$

συνεπώς ο γεωμετρικός μέσος των κ , ν είναι ο θετικός $\sqrt{\kappa\nu}$

γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ

Α. αν α> β και γ> δ $\Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$ **ΛΑΘΟΣ** γιατί ισχύει μόνο για α,β,γ,δ θετικούς

Β. στο τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ αν η διακρίνουσα είναι Δ=0 τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε $x \in R$ **ΛΑΘΟΣ**

είναι ομόσημο του α $\forall\, x \in R-\{x_1\}$ όπου $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ η διπλή ρίζα του τριωνύμου

Γ. αν $|x| > \theta$ με $\theta > 0$ τότε ισχύει $-\theta < x < \theta$ **ΛΑΘΟΣ**
ισχύει $x < -\theta$ ή $x > \theta$

ΖΗΤΗΜΑ 2°

Θέλουμε να βρούμε το άθροισμα των πολλαπλασίων του 7 που είναι μεταξύ του 20 και του 250
θα έχουμε τα πρώτα πολλαπλάσια του 7 μετά το 20
είναι το 21 , 28 ,35 , … και τα τελευταία … ,238,245
άρα θέλουμε το άθροισμα της ακολουθίας 21 , 28 ,35 , …,238,245
προφανώς η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος γιατί

$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 7$ **δηλαδή** $\omega=7$ **και** $\alpha_1=21$ **και** $\alpha_\nu=245$

από $\alpha_\nu = 245 \Rightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 245 \Rightarrow$

$\Rightarrow 21 + (\nu-1)7 = 245 \Rightarrow 7\nu = 231 \Rightarrow \nu = 33$

Αρα $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \Rightarrow S_{33} = \frac{33}{2}(21+245) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{33} = \frac{33 \cdot 266}{2} \Rightarrow S_{33} = 4.389$

ΖΗΤΗΜΑ 3°

για να βρούμε το πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \sqrt{\frac{(x^2-7x+12)(x^2-4x+4)}{3-x}}$$

πρέπει

$$\pi(x) = \frac{(x^2-7x+12)(x^2-4x+4)}{3-x} \geq 0$$

Στο τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$ **βρίσκουμε την διακρίνουσα**

Δ=1> 0 οπότε $x_1 = 4$ **και** $x_2 = 3$

Στο τριώνυμο $x^2 - 4x + 4$ **βρίσκουμε την διακρίνουσα**

Δ=0 οπότε $x_1 = 2$ **διπλή ρίζα**

Στο διώνυμο $3 - x$ **ρίζα είναι το** $x = 3$

Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$ … 2	2 … 3	3 … 4	4 … $+\infty$
$x^2 - 7x + 12$	+	+	−	+
$x^2 - 4x + 4$	+	+	+	+
$3 - x$	+	+	−	−
$\pi(x)$	+	+	+	−

πρέπει $3 - x \neq 0$ **που είναι στον παρονομαστή**

οπότε $x \neq 3$

Συνεπώς <u>πεδίο ορισμού</u> $(-\infty, 3) \cup (3, 4]$

ΖΗΤΗΜΑ 4°

Για να συγκρίνουμε τις ρίζες $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}}}$ **και** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[10]{64}}}$

ξέρουμε ότι για θετικούς α,β ισχύει

$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$

$\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} < \beta^{\nu}$

$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$

επειδή οι ρίζες είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να τις υψώσουμε στην 4η οπότε θα έχουμε

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}}}\right)^4 = \sqrt[5]{\sqrt[3]{8}} \quad \text{και} \quad \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[10]{64}}}\right)^4 = \sqrt[3]{\sqrt[10]{64}}$$

τις ρίζες $\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}}$ **και** $\sqrt[3]{\sqrt[10]{64}}$ **τις υψώνουμε στην 15η γιατί το 15 είναι το Ε.Κ.Π του 5 και 3 και θα έχουμε**

$$\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}}\right)^{15} = \left(\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}}\right)^5\right)^3 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 8$$

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[10]{64}}\right)^{15} = \left(\left(\sqrt[3]{\sqrt[10]{64}}\right)^3\right)^5 = \left(\sqrt[10]{64}\right)^5 = \left(\sqrt[5]{\sqrt{64}}\right)^5 = \sqrt{64} = 8$$

άρα έχουμε $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[10]{64}}}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΕΡΕΚΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ