Φροντιστηριακό Κέντρο Ιωαννίνων

ΣΚΑΛΙΣΤΗ - ΔΕΡΕΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΕΡΕΚΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

Α) α) Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $\boxed{x_1 < x_2}$ ισχύει $\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$.

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει: τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_1)$ $\forall\, x$ σε μια περιοχή του x_1

Β) α) $\rightarrow$ ΛΑΘΟΣ β) $\rightarrow$ ΛΑΘΟΣ γ) ΛΑΘΟΣ (ισούται με 1 ή 100 αν έχουμε σχ. συχν. %) δ) $\rightarrow$ ΛΑΘΟΣ

Γ) Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά $N(A) \leq N(B) \Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

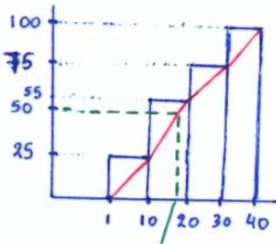
Ζήτημα 2ο

α) $\boxed{\nu = 400}$

ΚΛΑΣΕΙΣ ΧΡΟΝΙΑ ΥΠΗΡ.	x_i	ν_i ΑΡΙΘΜΟΣ ΥΠΑΛΛ.	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i\nu_i$
1-10	5	100	25	100	25	500
10-20	15	120	30	220	55	1800
20-30	25	80	20	300	75	2000
30-40	35	100	25	400	100	3500
		400	100			7800

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{7800}{400} = \boxed{19,5}$$

β)



$\boxed{\delta = 18,\bar{3}}$

Εύρεση διαμέσου: Από 25 μέχρι 55 έχουμε 30 κάθετο άξονα
Από 10 μέχρι 20 έχουμε 10 οριζόντιο άξονα
Από 25 μέχρι 50 έχουμε 25 κάθετο άξονα

Εφαρμόζοντας αναλογία $\rightarrow \frac{30}{25} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 8,333...$

Άρα $\delta = 10 + 8,\bar{3} = \boxed{18,\bar{3}}$

γ) $P(A) = \frac{300}{400} = \boxed{0,75}$ γιατί $N(A) = 120 + 80 + 100$ ϗ $N(\Omega) = 400$

δ) $P(B) = \frac{160}{400} = \boxed{0,4}$ γιατί $N(B) = 100 + \frac{120}{2}$ ϗ $N(\Omega) = 400$ (Με την προϋπόθεση η κατανομή να είναι κανονική)

ε) $\boxed{100}$ $\boxed{\text{υπάλληλοι}}$

Ζήτημα 3° $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ a, & x=1 \end{cases}$

(α) Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το R

(β) Για $x\neq 1$ η $f(x)$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Για $x_0=1$ για να είναι συνεχής πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$
έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=1^2+1+1=3$
$f(1)=a$ Άρα $\boxed{a=3}$

(γ) Για $x\neq 1$ $f(x)=x^2+x+1$ άρα $\boxed{f'(x)=2x+1}$
Για $x=1$ $f(x)=3$ άρα $\boxed{f'(x)=3'=0}$

(δ) ($x\neq 1$) η εφαπτόμενη θα έχει εξίσωση $\boxed{y=ax+b}$, αφού είναι κάθετη με την ευθεία $\boxed{y=-\frac{1}{2}x+3}$
θα ισχύει $a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Rightarrow \boxed{a=2}$ άρα η εφαπτομένη θα έχει εξίσωση $\boxed{y=2x+b}$
όμως $f'(x)=2 \Rightarrow 2x+1=2 \Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$ άρα το σημείο επαφής $f'(x)$
είναι $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\boxed{\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)}$
γιατί $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{1+2+4}{4}=\frac{7}{4}$

Άρα για $y=\frac{7}{4}$ η $x=\frac{1}{2}$ στην $y=2x+b \Rightarrow \frac{7}{4}=2\cdot\frac{1}{2}+b \Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{4}}$

Συνεπώς η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\boxed{y=2x+\frac{3}{4}}$

Ζήτημα 4° $f(x)=[x-P(A)]^3+3xP(A-B)$, $x\in R$, $P(A)=\frac{1}{2}$

(α) $f'(x)=3[x-P(A)]^2[x-P(A)]'+3P(A-B)=3(x^2-2xP(A)+P^2(A))+3P(A-B)=3x^2-6xP(A)+3P^2(A)+3P(A-B)$
$=3x^2-6x\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3P(A-B)=\boxed{3x^2-3x+\frac{3}{4}+3P(A-B)}$

(β) $f''(x)=6x-3$
$=3(2x-1)$

	$\frac{1}{2}$	
$-$		$+$
$\searrow$		$\nearrow$

για $x<\frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1<0 \Rightarrow f''(x)<0$
για $x>\frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1>0 \Rightarrow f''(x)>0$
Άρα η $f'(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και γν. αύξουσα στο $[1/2,+\infty]$
και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{1}{2}$ το $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

(γ) θα ισχύει $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3} \Rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+3P(A-B)=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+3P(A-B)=\frac{1}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3P(A-B)=\frac{1}{3}-\frac{6}{4}+\frac{3}{2} \Rightarrow 36P(A-B)=4-18+18 \Rightarrow P(A-B)=\frac{4}{36} \Rightarrow P(A-B)=\frac{1}{9}$

Όμως $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)-P(A-B) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=\frac{7}{18}}$